Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования

« МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОДОВОЛЬСТВИЯ»

Кафедра физики

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ОШИБОК ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ И КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания к лабораторной работе № 0
по разделу "Механика и молекулярная физика" курса общей физики
для студентов всех специальностей дневной и заочной формы обучения

Могилев 2011

Рассмотрены и рекомендованы к изданию
на заседании кафедры физики
Протокол № 9 от 12 мая 2011 г.

Составители:
ассистент Пусовская Т.И.

Рецензент:
кандидат физико – математических наук, доцент УО МГУП
В.Л.Малышев.

УДК 532.516

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 0

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ОШИБОК ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ И КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: определение плотности твердого тела правильной геометрической формы; расчет абсолютной и относительной погрешностей измерений.

ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ: весы, разновесы, штангенциркуль, образец исследуемого вещества (цилиндр).

1 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

При проведении экспериментальных исследований и обработке результатов измерений получаемые значения величин в большинстве случаев являются приближенными.

Измерением называется нахождение значения определяемой величины опытным путем с помощью специальных технических средств, устройств или приборов. Измерения делятся на прямые и косвенные.

Прямым измерением называется измерение, при котором значение определяемой величины находится непосредственно считыванием по шкале измерительного инструмента или прибора. Например, измерение длины линейкой или времени секундомером.

Косвенное измерение – это измерение, при котором значение величины находится путем расчета по формуле, в которой фигурируют величины, определяемые путем прямых измерений. Например, необходимо определить объем параллелепипеда. Для этого можно воспользоваться формулой $V = a \cdot b \cdot c$. Вычисление объема тела относится к косвенным измерениям, так как искомая величина объема V задается как функция величин, определяемых путем прямых измерений, в нашем случае длины a, ширины b и высоты c параллелепипеда.

1.1 Погрешности измерений

При выполнении любых измерений получают не абсолютно точные, а приближенные значения искомых величин. Иными словами, результаты измерений имеют погрешность (ошибку) измерений.

Погрешности делятся на приборные, случайные и промахи. Промахи – ошибки, вызванные чаще всего внезапной поломкой прибора или невнимательностью экспериментатора. Результаты, которые не попали в доверительный интервал при очень высокой вероятности, например $p=0,99$, являются промахами. Этот результат в расчетах обычно не учитывается (отбрасывается).

За истинное значение измеряемой величины, как правило, принимают среднее значение. Если x – измеряемая величина, то

$$x_{ср.} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (1)$$

где n– число измерений, i – порядковый номер измерения.

1.2 Абсолютная погрешность

В большинстве случаев $x_i \neq \bar{x}$, поэтому считают

$$x_i = \bar{x} \pm \Delta x, \qquad (2)$$

где Δx – **абсолютная погрешность**, которая показывает отклонение измеряемой величины от ее среднего значения.

В соответствии с теорией ошибок причинами появления абсолютной погрешности могут быть приборные и случайные ошибки. Вычисление **абсолютной погрешности** осуществляется по формуле

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{приб.}{}^2 + \Delta x_{сл.}{}^2}, \qquad (3)$$

где $\Delta x_{приб.}$- приборная погрешность, т.е. погрешность прибора, которым выполняют прямое измерение;
$\Delta x_{сл.}$ – случайная погрешность.

1.3 Определение приборных погрешностей $\Delta x_{приб.}$

1.3.1 В отдельных случаях значение $\Delta x_{приб.}$ указано на шкале прибора, в инструкции по его эксплуатации или известно из ГОСТов. Если такой возможности нет, то значение $\Delta x_{приб.}$ может осуществляется различными способами.

1.3.2 В приборах с <u>дискретным</u> (прерывистым, скачкообразным) измерением (секундомер, пересчетные устройства и т.п.)

за $\Delta x_{приб.}$ принимают цену деления прибора.

Цена деления – минимальная разница между соседними делениями шкалы прибора.

1.3.3 В приборах <u>непрерывного</u> измерения (линейка, рулетка, термометр)

за $\Delta x_{приб.}$ принимают ½ цены деления прибора.

1.3.4 На <u>электроизмерительных</u> приборах обычно указан класс точности (КТ). КТ указывается в процентах и определяется формулой:

$$KT = \frac{\Delta x_{приб.}}{x_{\max}} \cdot 100\%. \text{ Следовательно } \Delta x_{приб.} = \frac{KT \cdot x_{\max}}{100\%},$$

где $x_{\max}$ - предел измерения прибора (максимальная величина, которую можно измерить данным прибором)

1.4 Ошибка округления

Если значение используемой при расчетах косвенно измеряемой величины x **задано** некоторым **числом**, то при вычислении погрешности следует учитывать ошибку округления. Данная ошибка определяется как единица последнего разряда числа, деленная пополам.

Пример 1. При использовании в расчетах числа π взятого с точностью до двух знаков 3,14 ошибка округления составляет $\Delta\pi$=0,01/2=0,005. Если ускорение свободного падения g принять равным 9,8 м/с^2, то ошибка округления составит Δg= 0,05 м/с^2.

1.5 Случайная погрешность

Случайная погрешность $\Delta x_{сл.}$ вычисляется по формуле:

$$\Delta x_{сл.} = \tau_{n,p}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}\,, \qquad (4)$$

где $\tau_{n,p}$ – коэффициент Стьюдента (находится по таблице),

n – число измерений,

p – **доверительная вероятность**, которая показывает вероятность того, что результат отдельного измерения отличается от истинного значения на величину, не большую, чем Δx.

Коэффициент Стьюдента определяется по таблице в зависимости от доверительной вероятности и числа измерений. При проведении лабораторных исследований в учебном процессе доверительная вероятность p принимается равной 0,95. Если число измерений равно 3, то в таблице находим значение коэффициента Стьюдента равное 4,3.

1.6 При прямых измерениях, если опыт проводится **1 раз**, случайная погрешность $\Delta x_{сл}$ =0, следовательно, исходя из формулы (3), абсолютная погрешность $\Delta x = \Delta x_{приб.}$.

Если опыт проводится **2 и более раз**, тогда необходимо использовать формулу (3).

Пример 2. Высоту h измерили 3 раза линейкой. Получили h_1, h_2, h_3. Используя формулу (3), находим абсолютную погрешность:

$$\Delta h = \sqrt{\Delta h_{приб.}{}^2 + \Delta h_{сл.}{}^2}\,.$$

Приборная погрешность $\Delta h_{приб} = 0{,}5\cdot10^{-3}$ (м).

Случайная погрешность определяется, исходя из формулы (4):

$$\Delta h_{сл.} = 4{,}3\sqrt{\frac{\Delta h_1{}^2 + \Delta h_2{}^2 + \Delta h_3{}^2}{3(3-1)}}\,,$$

где $\Delta h_1 = \left|\bar{h} - h_1\right|$,

$\Delta h_2 = \left|\bar{h} - h_2\right|$,

$\Delta h_3 = \left|\bar{h} - h_3\right|$.

1.7 Относительная погрешность

Абсолютная погрешность измерения не несет в себе всей полноты информации о точности метода (например, одинаковые Δx*=0.1 м* при изготовлении мебели и измерении расстояния между населенными пунктами имеют существенно различный смысл). Поэтому используется **относительная погрешность измерения** *E*.

Относительная погрешность (*E*) **прямого измерения** определяется по формуле:

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%, \qquad (5)$$

где Δx – абсолютная погрешность измерения, сравнивается со значением измеряемой величины $\bar{x}$,

$\bar{x}$ - среднее значение измеряемой величины.

Пусть величина x задана формулой

$$x = \frac{a^n b^m}{c^k}.$$

Вычисление величины x - косвенное измерение, тогда его **относительная погрешность** (E) определяется по формуле:

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} = \sqrt{\left(n\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(m\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2 + \left(k\frac{\Delta c}{\bar{c}}\right)^2} \qquad (6)$$

<u>*Пример 3*</u> Необходимо рассчитать относительную погрешность измерения площади *S* прямоугольника. Так как площадь фигуры определяется по формуле

$$S = a\,b,$$

где *a* – длина прямоугольника, *м;*

b – ширина, *м,*

то относительная погрешность *E* ,исходя из формулы (6), рассчитывается как

$$E = \frac{\Delta S}{\bar{S}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2}.$$

<u>*Пример 4*</u> Площадь *S* круга находится по формуле

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

где *d* – диаметр круга, *м.*

Относительная погрешность измерения его площади

$$E = \frac{\Delta S}{\bar{S}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)^2}.$$

Применим эти теоретические знания к лабораторной работе.

Цель работы – определить плотность вещества, из которого изготовлен цилиндр, и рассчитать погрешность. Как известно, плотность тела определяется по формуле:

$$\rho = \frac{m}{V}, \tag{7}$$

где m – масса тела, *кг;*
V – объем тела, *м*^{3}.

Объем цилиндра V равен

$$V = S\,h, \tag{8}$$

где h – высота цилиндра, *м;*
S – площадь основания цилиндра , *м*^{2}.

Площадь основания S цилиндра – круг, следовательно

$$S = \frac{\pi D^2}{4}, \tag{9}$$

где D – диаметр цилиндра, *м.*

Подставим формулы (8) и (9) в формулу (7), получаем рабочую формулу:

$$\rho = \frac{4m}{\pi D^2 h}. \tag{10}$$

где m – масса тела, *кг;*
D – диаметр цилиндра, *м;*
h – высота цилиндра, *м.*

Используя теоретическое введение, получим формулу для подсчета относительной погрешности измерения E:

$$E = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}, \tag{11}$$

где $\bar{\rho}$ - среднее значение плотности материала, из которого изготовлен цилиндр.

$$\bar{\rho} = \frac{4m}{\pi \bar{D}^2 \bar{h}}, \tag{12}$$

где m – масса тела, *кг;*
$\bar{h}$ – среднее значение высоты цилиндра, *м;*
$\bar{D}$ – среднее значение диаметра цилиндра, *м.*

Следовательно,

$$E = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta D}{\bar{D}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\bar{h}}\right)^2}. \tag{13}$$

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1 С помощью аналитических весов 1 раз измеряем массу цилиндра

2 Поворачивая цилиндр вокруг своей оси, штангенциркулем измеряем 3 раза высоту цилиндра h . Находим среднее значение $\bar{h}$. Данные h_1, h_2, h_3 и $\bar{h}$ заносим в таблицу 1.

3 В разных сечениях измеряем штангенциркулем 3 раза диаметр цилиндра D . Находим среднее значение $\overline{D}$. Данные D_1,D_2,D_3 и $\overline{D}$ записываем в таблицу 1.

Таблица 1 – Вычисление средней плотности

m (кг)	D (м)	$\overline{D}$ (м)	h (м)	$\bar{h}$ (м)	$\bar{\rho}$ (кг/м^3)

4 Все средние значения $\bar{h}$ и $\overline{D}$ подставляем в формулу (12) и вычисляем среднее значение плотности $\bar{\rho}$ металла, из которого изготовлен данный цилиндр.

5 Определяем абсолютную погрешность измерений.

5.1 Рассчитываем погрешность единичных измерений высоты и диаметра цилиндра (смотри Пример 2, стр.5)

$$\Delta h_i = \left|\bar{h} - h_i\right|,$$

$$\Delta D_i = \left|\overline{D} - D_i\right|,$$

Результаты расчетов записываем в таблицу 2.

Таблица 2 – Результаты расчетов погрешностей измерений

№	Δh_i	$\Delta h_{сл.}$	$\Delta h_{пр.}$	Δh	ΔD_i	$\Delta D_{сл.}$	$\Delta D_{пр.}$	ΔD
1								
2								
3								

5.2 Вычисляем случайные ошибки измерения высоты и диаметра:

$$\Delta h_{сл.} = t_{n,p}\sqrt{\frac{\sum \Delta h_i^{\,2}}{n(n-1)}},$$

$$\Delta D_{сл.} = t_{n,p}\sqrt{\frac{\sum \Delta D_i^{\,2}}{n(n-1)}},$$

где коэффициент Стьюдента $t_{n,p}$=4,3, если число измерений n=3.
Полученные значения $\Delta h_{сл.}$ и $\Delta D_{сл.}$ подставляем в таблицу 2.

5.3 Определяем полную абсолютную погрешность высоты и диаметра цилиндра.

$$\Delta h = \sqrt{\Delta h_{сл.}^{\,2} + \Delta h_{приб.}^{\,2}},$$

$$\Delta D = \sqrt{\Delta D_{сл.}^{\,2} + \Delta D_{приб.}^{\,2}},$$

где $\Delta h_{пр.}$ и $\Delta D_{пр.}$ - приборные погрешности штангенциркуля (0,1 мм либо 0,05 мм).

5.4 Массу цилиндра измеряли 1 раз, следовательно, абсолютная погрешность измерения массы $\Delta m = \Delta m_{приб.}$. Приборная погрешность аналитических весов $\Delta m_{приб.}$ составляет $\Delta m_{приб.} = 5\cdot 10^{-5}$кг.

6 Рассчитываем относительную погрешность определения плотности материала цилиндра E по формуле (13).

При выполнении расчетов принимаем π=3,14, а ошибку округления $\Delta\pi$=0,005.

7 Вычисляем абсолютную погрешность определения плотности:

$$\Delta\rho = \overline{\rho}\cdot E\,.$$

8 Окончательный результат представляем в виде:

$$\rho = \overline{\rho} \pm \Delta\rho$$

9 Для того, чтобы определить из какого материала изготовлен цилиндр, сравниваем полученное значение плотности вещества ρ с данными из таблицы 3.

Таблица 3 – Плотности некоторых твердых тел

Вещество	Плотность (кг/м^3)
Алюминий	2600
Медь	8600
Свинец	11300
Сталь	7700
Олово	7200

При выполнении расчетов необходимо пользоваться правилами приближенных вычислений (смотри приложение 1).

3 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Какие измерения называются прямыми, а какие косвенными?

2 Приборные погрешности и возможности определения приборных погрешностей.

3 Определение абсолютной погрешности при прямых измерениях.

4 Определение относительной погрешности при прямых измерениях.

5 Определение относительной погрешности при косвенных измерениях.

6 Как определяется абсолютная погрешность при однократном измерении величины?

7 Как определяется случайная ошибка?

4 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Трофимова Т.И. Курс физики/Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 2008. -558с.

2 Детлаф А.А. Курс физики: учеб. пособие/. А.А Детлаф, Б.М. Яворский . - 4-е изд., испр.- М.: Академия, 2005 – 720 с.

3 Савельев И. В. Курс общей физики: учеб. пособие. В 5 кн. Кн. 1. Механика/ И. В. Савельев. – М.: АСТ, Астрель, 2006 – 336 с.

4 Е.М.Гершензон А.Н.Мансуров. Лабораторный практикум по общей и экспериментальной физике. Москва, Академия, 2004 –

Приложение 1

СВЕДЕНИЯ О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

При решении задач числовые значения, с которыми приходится иметь дело, большей частью являются приближенными. Задачи с приближенными данными нужно решать с соблюдением правил подсчета значащих цифр. Значащими называют все цифры, кроме нуля. А также нуль в двух случаях: 1) когда он стоит между значащими цифрами; 2) когда он стоит в конце числа и известно, что единицы соответствующего разряда в данном числе нет.

Приближенные вычисления следует вести с соблюдением следующих правил:

1 Так как с помощью вычислений получить результат более точный, чем исходные данные, невозможно, то достаточно производить вычисления с числами, содержащими не более знаков, чем в исходных данных.

2 При сложении или вычитании приближенных чисел, имеющих различную точность, более точное число должно быть округлено до точности менее точного. Например:

$9{,}6 + 0{,}176 = 9{,}6 + 0{,}2 = 9{,}8$

$100{,}8 – 0{,}427 = 100{,}8 – 0{,}4 = 100{,}4.$

3 При умножении и делении следует в полученном результате сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет данное с наименьшим количеством значащих цифр. Например:

$0{,}625 \times 0{,}015 = 0{,}009$, но не $0{,}009375$

$0{,}524 \times 0{,}17 = 0{,}08$, но не $0{,}08908$

$6{,}32 \div 3 = 2$, но не $2{,}107$

4 При возведении в квадрат или куб нужно сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень число. Например:

$1{,}25^2 = 1{,}56$, но не $1{,}5625$

$1{,}01^3 = 1{,}03$, но не $1{,}030301$.

5 При извлечении квадратного и кубического корней в результате нужно сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное выражение. Например:

$\sqrt{10} = 3{,}1$, но не $3{,}162$

$\sqrt[3]{10} = 2{,}1$, но не $2{,}154$

При вычислении сложных выражений соблюдают правила в зависимости от вида производимых действий.

Учебное издание

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ОШИБОК ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ И КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания

Составитель
Пусовская Татьяна Ивановна

Редактор *А.А.Щербакова*
Технический редактор *Т.В.Багуцкая*

Подписано в печать   Формат 60x84 1/16 Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Ризография.Усл. печ. л.   Уч.-изд. л.
Тираж   экз. Заказ

Учреждение образования «Могилевский государственный университет продовольствия».
ЛИ № 02330/0131913 от 08.02.2007
212027, Могилев, пр-т Шмидта, 3.

Отпечатано в учреждении образования «Могилевский государственный университет продовольствия».
212027, Могилев, пр-т Шмидта, 3.