МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

МОГИЛЕВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра физики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ N9

“ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ”

по разделу “Механика” курса общей физики
для студентов всех специальностей

Могилев 1998

УДК 533

Рассмотрены и рекомендованы к изданию
на научно-методическом семинаре кафедры
физики “___“ __________1998 г. (протокол 9)

Составитель: асс. Каранчук Д.Я.

Рецензент: доцент кафедры физики Довнар Д.В..

Лабораторная работа N9
ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА
МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ.

ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ: кронштейн с закрепленной проволокой, платформа, два одинаковых цилиндрических тела, штангенциркуль, секундомер, исследуемое тело.
ЦЕЛЬ РАБОТЫ: измерить момент инерции платформы и исследуемого тела методом крутильных колебаний.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ.

Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси определяется выражением:

$$J = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV \qquad (1),$$

где r - расстояние от элемента массы dm твердого тела до оси вращения,
ρ - плотность этого элемента, либо закон распределения плотности ρ=f(r) в случае ρ≠const.

Для однородных (ρ=const.) осесимметричных тел момент инерции можно вычислить по формуле (1).

Вычислим , например, момент инерции однородного цилиндра относительно его геометрической оси OO.

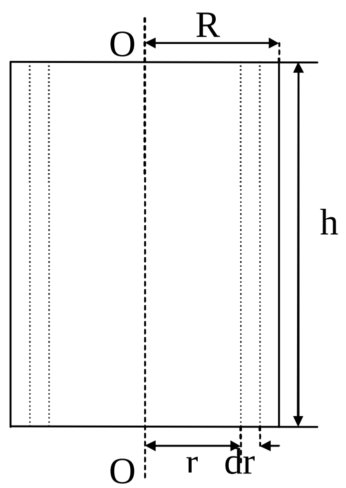

Рис.1

Разобьем цилиндр на слои радиуса r и толщины dr. Масса такого слоя равна $dm = \rho dV = \rho 2\pi r h dr$

(dV=2πrhdr - объем слоя). Все точки слоя отстоят от оси OO на одинаковое расстояние r. Поэтому вклад слоя в момент инерции равен

$$dJ = \rho r^2 dV = \rho r^2 2\pi r h dr = 2\pi \rho h r^3 dr$$

. Проинтегрировав это выражение по r в пределах от 0 до R (R - радиус цилиндра), получим искомый момент инерции.

$$J = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} = \tfrac{1}{2}\rho h \pi R^2 R^2 = \tfrac{1}{2}\rho V R^2 = \tfrac{1}{2} m R^2 \qquad (2).$$

Полученное выражение не зависит от высоты цилиндра h. Следовательно, формула (2) определяет и момент инерции тонкого однородного диска относительно перпендикулярной к нему, проходящей через его центр оси. Расчет момента инерции J относительно произвольной оси, упрощает теорема Штейнера: *момент инерции тела J относительно произвольной оси, равен сумме момента инерции J_o относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями:*

$$J = J_0 + ma^2 \qquad (3)$$

В случаях, когда вычисление момента инерции по формуле (1) связано со значительными сложностями при интегрировании (ρ≠const и закон ρ=f(r) изменения плотности не известен, нет осевой симметрии), для расчета момента инерции используют различные экспериментальные методы.

Суть одного из них в следующем. Тело подвешивают на стальной проволоке так, чтобы оно могло совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью проволоки (рис.2).

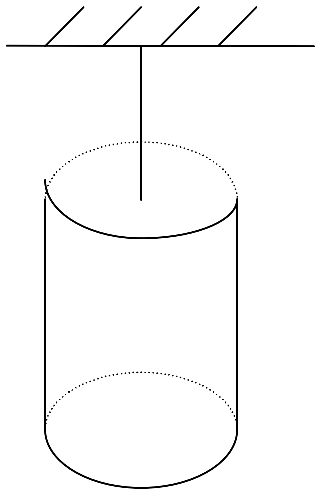

Рис.2

При повороте тела на угол φ проволока закручивается, и в ней возникает момент сил M, стремящийся вернуть тело в положение равновесия.

Момент M в довольно широких пределах пропорционален углу φ:

$$M = -N\varphi \qquad (4),$$

где φ - угол поворота (в радианах), N - постоянная для данной проволоки величина, называемая ее модулем кручения (направляющим моментом). Направляющий момент N численно равен моменту сил упругости, возникающих в проволоке, при ее закручивании на угол 1 радиан.

По основному уравнению динамики вращательного движения относительно оси вращения:

$$J\varepsilon = M \qquad (5),$$

где J - момент инерции тела относительно оси; ε - угловое ускорение; M - момент сил, относительно оси вращения.

Учитывая, что $\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ и M= -Nφ, формулу (5) можно переписать в виде:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -N\varphi\,.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{N}{J}\varphi = 0 \ (6).$$

Введем обозначение: $\omega^2 = \frac{N}{J}$ (7). Тогда

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \ (8)$$

Получили уравнение, подобное уравнению, описывающему колебания груза, подвешенного на пружине, или колебания маятника. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что его решение имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Таким образом, крутильные колебания груза, в данном случае, будут гармоническими. Циклическая частота собственных крутильных колебаний $\omega = \sqrt{\frac{N}{J}}$. Период колебаний: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{N}}$ (9)

Формула (9) получена для незатухающих колебаний, в то время как на самом деле колебания всегда затухают. Если, однако, затухания невелики, т.е. изменение амплитуды колебаний за период много меньше самой амплитуды, то формулой (9) можно пользоваться. Период T не зависит от амплитуды φ_o, однако, при больших амплитудах закон Гука (4) нарушается и такая зависимость может появиться. Таким образом, вторым условием применимости данного метода является соблюдение равенства: T=const.

Сняв первое тело, подвесим на той же проволоке другое тело с моментом инерции J'. Тогда период колебаний: $T' = 2\pi\sqrt{\frac{J'}{N}}$ (10).

Из (9) и (10) находим:

$$\frac{J}{J'} = \left(\frac{T}{T'}\right)^2 \qquad (11).$$

Если в качестве первого тела взять тело с известным моментом инерции J, или однородное тело правильной геометрической формы (шар, цилиндр, диск) и по (1) и (3) вычислить J, то из (11) можно вычислить момент инерции J' исследуемого тела. Периоды колебаний можно определить экспериментально, измерив время t и t' за которое происходит n колебаний в обоих случаях: $T = \frac{t}{n}$; $T' = \frac{t'}{n}$.

ВЫВОД РАСЧЕТНОЙ ФОРМУЛЫ

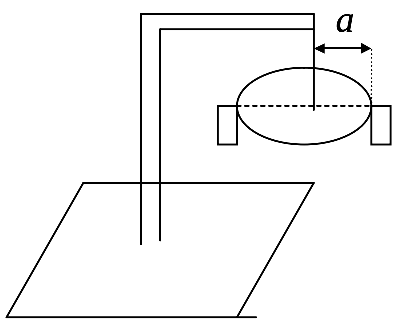

Рис.3

Пусть J_1 - момент инерции платформы, T_1-период крутильных колебаний платформы.

Закрепим два одинаковых цилиндра по краям платформы так, чтобы расстояния *a* от их осей симметрий до оси колебаний были равными.

Момент инерции цилиндрического груза относительно оси колебаний равен, по теореме Штейнера:

$$J = \frac{mR^2}{2} + ma^2 \quad (12)$$

Тогда момент инерции системы, состоящей из платформы и двух грузов в силу свойства аддитивности момента инерции:

$$J_2 = J_1 + 2J \quad (13),$$

а период колебаний системы - T_2. Из формул (11), (12), (13) получаем:

$$\frac{J_1}{J_1 + 2J} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \quad (14).$$

Отсюда момент инерции платформы:

$$J_1 = \frac{2JT_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \quad (15).$$

Если, теперь, снять грузы и установить на платформу исследуемое тело, то на основании (14):

$$\frac{J_1}{J_1 + J_T} = \left(\frac{T_1}{T_3}\right)^2 ,$$

где $J_т$ - момент инерции тела, T_3 - период колебаний системы, состоящей из платформы и исследуемого тела.

Из последнего выражения находим момент инерции тела:

$$J_T = \frac{J_1(T_3^2 - T_1^2)}{T_1^2} \quad (16).$$

С учетом (15) формула (16) примет вид:

$$J_T = \frac{2J(T_3^2 - T_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} \quad (17).$$

ХОД РАБОТЫ

Задание 1. Измерение момента инерции платформы.

1. Установить диапазон амплитуд, в котором выполняется условие T=const. Для этого, возбудив в системе крутильные колебания, измерить время нескольких (не менее десяти) колебаний, найти период T_1. Уменьшив амплитуду вдвое, тем же способом, найти соответствующий период T_2. Если $T_1=T_2$, то для проведения измерений можно выбрать любую амплитуду не больше первой. Если же окажется, что $T_1 \neq T_2$, то амплитуду необходимо уменьшить до такого значения Ф, начиная с которого для всех $\varphi_i < Ф$ будет справедливо равенство $T_1=T_2$.

2. Повернуть платформу относительно оси проволоки на некоторый угол $\varphi_o < Ф$ и отпустить ее.

3. Пропустив 2-3 колебания измерить время t_1, за которое происходит n ($n \geq 10$) крутильных колебаний.

4. Повторив опыт 3-5 раз определить средний период T_1 колебаний платформы $T_1 = \frac{t_{1ср}}{n}$.

5. Измерить радиус R и массу m цилиндра.

6. Закрепить два одинаковых цилиндрических груза по краям платформы симметрично относительно оси колебаний.

7. Измерить расстояние *a* от оси симметрии цилиндра до оси колебаний и по формуле (12) вычислить момент инерции J цилиндра относительно оси колебаний.

8. Привести систему в крутильные колебательные движения и определить средний период T_2 колебаний $T_2 = \frac{t_{2ср}}{n}$.

9. Вычислить момент инерции J_1 платформы по формуле (15).

10. Снять цилиндры с платформы.

Задание 2. Измерение момента инерции исследуемого тела.

1. Установить на платформу исследуемое тело так, чтобы ось колебаний совпала с его осью симметрии.

2 Определить средний период T_3 колебаний системы: $T_3 = \frac{t_{3ср}}{n}$.

3. По формуле (17) рассчитать значение момента инерции исследуемого тела.

Задание 3.

1. Вывести формулу для теоретического расчета момента инерции исследуемого тела. Для вывода можно пользоваться формулами для момента инерции однородных тел, обладающих осевой симметрией и свойством

аддитивности момента инерции (исследуемое тело представить как совокупность тел, моменты инерции которых можно вычислить по известным формулам [1, с.105-108] При этом удобно массу “элементарного” тела выразить через плотность и объем.

2. Вычислить значение момента инерции по полученным формулам и сравнить его с экспериментальным.

*Задание 4.

Используя данные заданий 1 и 2 вычислить среднее значение модуля кручения проволоки.

Контрольные вопросы

1 Дать определение момента инерции твердого тела относительно оси, пояснить его физический смысл.

2. Сформулировать теорему Штейнера.

3. Дать определение момента силы относительно точки и оси.

4. Записать и пояснить II закон Ньютона для вращательного движения (основное уравнение вращательного движения).

5. Пояснить физический смысл модуля кручения.

6. Вывести формулу (17) для расчета момента инерции тела.

Список используемых источников

1.Савельев И.В. Курс физики::Учеб.:В 3-х т.Т.1:Механика.Молекулярная физика.-М.:Наука. Гл.ред. физ-мат.лит.,1989.-355с.

2. Руководство к лабораторным занятиям по физике. Под редакцией Л.Л.Гольдина., М.:Наука,1973

3. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики:учебн.:В 3-х т.Т.1-Киев,Дніпро,1994г.

Составитель: ассистент Каранчук Дмитрий Ярославович

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 9

“ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ”

раздела “Механика” курса общей физики
для студентов всех специальностей

Нормоконтроль Хасаншина С.А.

Редактор Стрельцова С.Г.

Лицензия N226 от 12.02.98
Подписано в печать Формат 60x84
Печать офсетная. Усл.печ.л. Уч.изд.л.
Тираж Заказ Бесплатно

Отпечатано на ротапринте МТИ. 212027, г.Могилев, пр.Шмидта